Jurnal Matematika Murni dan Terapan Vol.5 No.2 Desember 2011: 40 - 52

ESTIMASI PARAMETER PADA DISTRIBUSI EKSPONENSIAL

Renny Aulia, Hj. Noor Fajriah, Nur Salam

Program Studi Matematika
Fakultas MIPA Unlam Banjarbaru, Kalsel

ABSTRAK

Estimasi titik dari sebuah parameter populasi adalah sebuah nilai yang diperoleh dari sampel dan digunakan sebagai penaksir dari parameter yang nilainya tidak diketahui. Estimator titik dapat ditentukan dengan menggunakan dua metode, yaitu metode klasik (metode Momen dan Maksimum *Likelihood*) dan metode Bayes. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan estimasi titik pada distribusi eksponensial untuk satu parameter dengan metode Momen, Maksimum *Likelihood* dan metode Bayes serta menentukan estimasi titik pada distribusi Eksponensial untuk dua parameter dengan metode Momen dan Maksimum *Likelihood*.

Metode penelitian yang digunakan adalah studi literatur dari berbagai sumber yang menunjang dan relevan dengan tinjauan yang dilakukan.

Hasil penelitian menunjukkan bahwa estimator titik pada distribusi Eksponensial untuk satu parameter dengan menggunakan Metode Momen dan Maksimum *Likelihood* adalah $\overline{X}$, sedangkan estimator Bayes dari distribusi Eksponensial untuk satu parameter dengan distribusi prior sekawan, yaitu distribusi Gamma adalah $\frac{\Gamma(n+p+1)}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i+\beta\right)\Gamma(n+p)}$ dan distribusi Chi Kuadrat adalah $\frac{\Gamma\left(n+\frac{k}{2}+1\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{k}{2}\right)}$. Estimator titik pada distribusi Eksponensial untuk dua parameter dengan menggunakan metode Momen adalah $\hat{\theta}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}-\overline{X}^2}$ dan $\hat{\eta}=\overline{X}-\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}-\overline{X}^2}$, sedangkan dengan menggunakan metode Maksimum *Likelihood* adalah $\hat{\theta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{1:n})}{n}$ dan $\hat{\eta}=x_{1:n}$.

Kata kunci: *Estimasi Titik, Distribusi Eksponensial, Metode Momen, Metode Maksimum Likelihood, Metode Bayes.*

ABSTRACT

Point estimation of a population parameter is a value obtained from related sample and used as an estimator of the parameter whose value is unknown. Point estimator can be determined by using two methods: classical method (moment method and maximum *likelihood*) and Bayes method. The purpose of this research is to determine the point estimation of an exponential distribution with one parameter using Moment method, Maximum *Likelihood* method and Bayes method and determine the point estimation of an exponential distribution with two parameters Moment method and Maximum *Likelihood* method.

The method of this research is a literature study from various sources that support and relevant to the topic.

The result shows that the point estimation of Exponential distribution for one parameter by using Moment method and Maximum *Likelihood* Method is $(\bar{x})$, while the Bayes estimator of Exponential distribution for one parameter with prior konjugate Gamma distribution is $\frac{\Gamma(n+p+1)}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + \beta\right)\Gamma(n+p)}$ and Chi Square is $\frac{\Gamma\left(n+\frac{k}{2}+1\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{k}{2}\right)}$. The point Estimation of exponential distribution for two parameters by using the Moment method is $\hat{\theta} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}{n} - \bar{X}^2}$ and $\hat{\eta} = \bar{X} - \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}{n} - \bar{X}^2}$, whereas by using the Maximum *Likelihood* method is $\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{1:n})}{n}$ and $\hat{\eta} = x_{1:n}$.

Keywords : Point Estimation, Exponential Distribution, Moment Method, Maximum Likelihood Method, Bayes Method.

1. PENDAHULUAN

Teori statistika inferensi mencakup semua metode yang digunakan dalam penarikan kesimpulan atau generalisasi mengenai suatu populasi (Walpole, 1995). Statistika inferensi adalah teori untuk menarik kesimpulan mengenai karakteristik populasi dari mana sampel itu diambil. Menarik kesimpulan tersebut dapat dilakukan dengan dua cara, yaitu estimasi parameter dan pengujian hipotesis. Estimasi dalam statistika ada dua jenis, yaitu estimasi titik dan estimasi interval. Estimasi titik dari sebuah parameter populasi adalah sebuah nilai yang diperoleh dari sampel dan digunakan sebagai penaksir dari parameter yang nilainya tidak diketahui. Estimator titik dapat ditentukan dengan menggunakan dua metode, yang pertama metode klasik, yaitu metode momen dan metode kemungkinan maksimum. Metode yang kedua yaitu metode Bayes.

Dalam penelitian ini dilakukan pengkajian mengenai bagaimana menentukan estimator titik pada distribusi eksponensial untuk satu parameter dengan menggunakan metode momen, metode maksimum *likelihood* dan metode Bayes dan dua parameter dengan menggunakan metode momen dan metode maksimum *likelihood* . Diharapkan melalui penelitian ini dapat menjadi bahan referensi dalam menentukan estimator titik serta sebagai referensi tambahan bagi para penelitian lain dalam menentukan estimator titik untuk distribusi yang lain contohnya distribusi Normal, distribusi Poisson, distribusi Binomial dan lain – lain.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Estimasi Parameter

Statistik inferensia merupakan teknik pengambilan keputusan tentang suatu parameter berdasarkan sampel yang diambil dari populasi tersebut yang meliputi dua hal penting yaitu estimasi parameter dan pengujian hipotesis. (Wibisono, 2005).

Definisi 1 (Walpole, 1995)

Sembarang nilai yang menjelaskan ciri populasi disebut parameter.

Metode Momen

Misalkan X adalah variabel random kontinu atau diskrit dengan fungsi kepadatan peluang berbentuk $f(x;\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k)$ dengan $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k$ adalah k buah parameter yang tidak diketahui. Misalkan X_1, X_2, ..., X_n merupakan sebuah variabel acak independen berukuran n dan didefinisikan k buah momen sekitar pusat sampel pertama sebagai (Herrhyanto, 2003) :

$$m_t^{'} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^t \, ; \qquad t = 1, 2, 3, ..., k$$

Metode Maksimum *Likelihood*

Definisi 2.2 (Herrhyanto, 2003)

$\hat{\theta}(\tilde{x})$ sedemikian sehingga $L(\theta)$ mencapai maksimum disebut penduga maksimum likelihood. Ini berarti $\hat{\theta}$ adalah nilai θ yang memenuhi

$$f(x_1,\ldots,x_n \mid \theta) = \max_{\theta\in\Omega} f(x_1,\ldots,x_n;\theta)$$

Metode Bayes

Distribusi Prior

Distribusi prior merupakan informasi tambahan mengenai θ, yaitu bahwa parameter itu bervariasi menurut suatu distribusi peluang tertentu dengan nilai tengah θ_0 dan ragam awal σ_0. Peluang yang berkaitan dengan distribusi ini disebut subjektif (Walpole, 1995).

Distribusi Posterior

Definisi 2.3 (Agustina, 2007)

Distribusi bersyarat θ bilamana pengamatan sampel $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ disebut dengan distribusi posterior dan ditentukan oleh :

$$h(\theta|\, x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{L}{L_1} = \frac{g(x_1, x_2, ..., x_n; \theta) \,.\, \lambda(\theta)}{\int_0^{\infty} g(x_1, x_2, ..., x_n; \theta) \,.\, \lambda(\theta)\, d\theta}$$

Berikut ini distribusi dari variabel random kontinu yang digunakan pada :

1. Distribusi Eksponensial

Berdasarkan parameternya distribusi eksponensial ada 2 (dua), yaitu

a. Eksponensial 1 (satu) parameter

Suatu distribusi peluang dikatakan berdistribusi eksponensial dengan satu parameter *X~Exp(θ)*, jika distribusi tersebut mempunyai fungsi kepadatan peluang

$$f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} \quad , x > 0$$

b. Eksponensial 2 (dua) parameter

Suatu distribusi peluang dikatakan berdistribusi eksponensial dengan dua parameter *X~Exp(θ,η)*, jika distribusi tersebut mempunyai fungsi kepadatan peluang

$$f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-(x-\eta)/\theta}, \quad \eta < x$$

3. METODOLOGI PENELITIAN

Metode penelitian ini dilakukan dengan cara studi literatur dari berbagai sumber yang menunjang dan relevan dengan tinjauan yang dilakukan. Buku atau materi yang digunakan dalam penelitian ini adalah buku-buku yang terkait dengan materi tentang estimasi titik, distribusi eksponensial, dan jurnal-jurnal.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Menentukan Estimator Titik Distribusi Eksponensial Satu Parameter

Berikut akan ditentukan estimator titik Distribusi Eksponensial satu parameter dengan Metode *Momen* dan Metode Maksimum *Likelihood* yang dapat dilihat pada teorema-teorema berikut:

Teorema 3.1.1 :

Jika $X \sim Exp(\theta)$ *maka estimator titik dengan menggunakan metode momen adalah* $\overline{X}$.

Bukti :

Menurut definisi momen, maka

$$\mu_1 = E(x) = \theta$$

$$m_1' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^1 = \overline{X}$$

$$\mu_1 = m_1'$$

$$\hat{\theta} = \overline{X}$$

Jadi, estimator titik dengan menggunakan metode momen adalah $\overline{X}$ atau

$\hat{\theta} = \overline{X}$ ■

Teorema 3.1.2 :

Jika $X \sim Exp(\theta)$ *maka estimator titik dengan menggunakan metode maksimum likelihood adalah* $\overline{X}$.

Bukti :

Fungsi likelihood dari $X_1, X_2, \ldots, X_n$ adalah :

$$L(\theta) = f(x_1;\theta)\cdot f(x_2;\theta)\cdot \cdots\ f(x_n;\theta)$$

$$= \frac{1}{\theta^n}\, e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta}} \tag{1}$$

$$L(\theta) = \theta^{-n} \exp\left[-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta}\right] \tag{2}$$

Kemudian untuk mempermudah perhitungan maka ditarik logaritma natural untuk kedua ruas menjadi :

$$\ln L(\theta) = = -n \ln\theta - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta} \tag{3}$$

Syarat fungsi maksimum L(θ) *likelihood* adalah :

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\ln L(\theta)\right] = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{\partial^2}{\partial^2\theta}\left[\ln L(\theta)\right] < 0$$

maka ln L(θ) diturunkan terhadap θ, sehingga :

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\ln L(\theta)\right] = = -\frac{n}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta^2} \tag{4}$$

kemudian untuk syarat kedua $\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\ln L(\theta)\right]$ diturunkan menjadi

$$\frac{\partial^2}{\partial^2\theta}\left[\ln L(\theta)\right] = = \frac{n}{\theta^2} - \frac{2\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta^3} \tag{5}$$

dari syarat fungsi maksimum *likelihood* yang pertama dan persamaan (4) diperoleh :

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\ln L(\theta)\right] = 0$$

$$-\frac{n}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta^2} = 0$$

$$\theta = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \tag{6}$$

dari persamaan (5) akan dibuktikan syarat fungsi maksimum *likelihood* yang kedua dipenuhi, yaitu :

$$\frac{\partial^2}{\partial^2\theta}\left[\ln\ L(\theta)\right] < 0$$

$$\frac{n}{\theta^2} - \frac{2\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta^3} < 0$$

$$-\frac{n^3}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\ 2}} < 0 \tag{7}$$

Karena nilai *n* positif dan nilai $\sum_{i=1}^{n} x_i^{\ 2}$ juga positif, maka $\hat{\theta}$ yang diperoleh akan memaksimalkan fungsi maksimum *likelihood*.
Jadi, estimator untuk θ adalah :

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \overline{X} \qquad \blacksquare$$

Selanjutnya akan ditentukan estimator titik distribusi eksponensial satu parameter dengan Metode Bayes. Adapun Distribusi Prior yang digunakan adalah Distribusi Gamma dan Distribusi Chi Kuadrat yang merupakan Prior sekawan. Sebelum menentukan estimatornya, akan ditentukan Distribusi Posterior yang dapat dilihat pada teorema-teorema berikut

Teorema 3.1.3:

Jika $X \sim Exp(\theta)$ *dan* $\theta \sim GAM\,(\beta, p)$ *maka Distribusi Posterior dari* θ *adalah*

$$Gamma\left[(n+p), \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{\beta}}\right)\right].$$

Bukti :

$$L = g(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)\,.\,\lambda(\theta)$$

$$= \frac{\beta^p}{\Gamma(p)}\theta^{n+p-1}\,e^{-\theta\,(\sum_{i=1}^{n} x_i + \beta)} \tag{8}$$

$$L_1 = \int_0^\infty g(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)\,.\,\lambda(\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{\beta^p}{\Gamma(p)}.\ \frac{\Gamma(n+p)}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + \beta\right)^{(n+p)}} \tag{9}$$

dari L dan L_1 diperoleh distribusi posteriornya, yaitu :

$$h(\theta|\ x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{L}{L_1} = \frac{g(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)\,.\,\lambda(\theta)}{\int_0^\infty g(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)\,.\,\lambda(\theta)\,d\theta}$$

$$h(\theta | x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + \beta\right)^{(n+p)}}{\Gamma(n+p)} \theta^{n+p-1} e^{-\theta(\sum_{i=1}^{n} x_i + \beta)} \quad (10)$$

Jadi, $\theta \sim Gamma\left[(n+p), \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{\beta}}\right)\right]$ ■

Teorema 3.1.4:

Jika $X \sim Exp(\theta)$ *dan* $\theta \sim \chi^2(k)$ *maka Distribusi Posterior dari* θ *adalah* $Gamma\left[\left(n+\frac{k}{2}\right), \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{2}}\right)\right]$.

Bukti :

$$L = g(x_1, x_2, ..., x_n; \theta) \,.\, \lambda(\theta)$$

$$= \frac{1}{(2)^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \theta^{n+\frac{k}{2}-1} e^{-\theta\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{2}\right)} \quad (11)$$

$$L_1 = \int_0^{\infty} g(x_1, x_2, ..., x_n; \theta) \,.\, \lambda(\theta) \, d\theta$$

$$= \frac{1}{(2)^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{2}}\right)^{\left(n+\frac{k}{2}\right)} \Gamma\left(n+\frac{k}{2}\right) \quad (12)$$

dari L dan L_1 diperoleh distribusi posteriornya, yaitu

$$h(\theta | x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{L}{L_1} = \frac{g(x_1, x_2, ..., x_n; \theta) \,.\, \lambda(\theta)}{\int_0^{\infty} g(x_1, x_2, ..., x_n; \theta) \,.\, \lambda(\theta) \, d\theta}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{2}}\right)^{\left(n+\frac{k}{2}\right)} \Gamma\left(n+\frac{k}{2}\right)} \theta^{n+\frac{k}{2}-1} e^{-\theta\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{2}\right)} \quad (13)$$

Jadi, $\theta \sim Gamma\left[\left(n+\frac{k}{2}\right), \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{2}}\right)\right]$ ■

Kemudian akan ditentukan estimator titik untuk θ berdasarkan Metode Bayes yang dapat dilihat pada teorema-teorema berikut

Teorema 3.1.5

Jika $X \sim Exp(\theta)$ *dan* $\theta \sim GAM\,(\beta, p)$ *maka estimator Bayes untuk* θ *adalah* $\dfrac{\Gamma(n+p+1)}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + \beta\right)\Gamma(n+p)}$

Bukti :

$$L_2 = \int_0^\infty \theta .\, g(x_1, x_2, \ldots, x_n;\, \theta)\,.\,\lambda(\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{\beta^p}{\Gamma(p)} \cdot \frac{\Gamma(n+p+1)}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + \beta\right)^{(n+p+1)}} \tag{14}$$

maka diperoleh estimator Bayes

$$\delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{L_2}{L_1} = \frac{\int_0^\infty \theta . g(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta).\lambda(\theta)}{\int_0^\infty g(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta).\lambda(\theta)}$$

$$= \frac{\Gamma(n+p+1)}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + \beta\right)\Gamma(n+p)} \tag{15}$$

Jadi, estimator Bayes dengan menggunakan distribusi Gamma adalah $\hat{\theta} = \delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \dfrac{\Gamma(n+p+1)}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + \beta\right)\Gamma(n+p)}$ ■

Teorema 3.1.6

Jika $X \sim Exp(\theta)$ *dan* $\theta \sim \chi^2(k)$ *maka estimator Bayes untuk* θ *adalah* $\dfrac{\Gamma\left(n+\frac{k}{2}+1\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{k}{2}\right)}$

Bukti :

$$L_2 = \int_0^\infty \theta .\, g(x_1, x_2, \ldots, x_n;\, \theta)\,.\,\lambda(\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{\Gamma\left(n+\frac{k}{2}+1\right)}{(2)^{\frac{k}{2}}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{2}\right)^{(n+\frac{k}{2}+1)}} \tag{16}$$

maka diperoleh estimator Bayes :

$$\delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{L_2}{L_1} = \frac{\int_0^\infty \theta . g(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta).\lambda(\theta)}{\int_0^\infty g(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta).\lambda(\theta)}$$

$$= \frac{\Gamma\left(n+\frac{k}{2}+1\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{k}{2}\right)} \tag{17}$$

Jadi, estimator Bayes dengan menggunakan distribusi Chi-Kuadrat adalah $\hat{\theta} = \delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \dfrac{\Gamma\left(n+\frac{k}{2}+1\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{k}{2}\right)}$ ■

3.2 Menentukan Estimator Titik Distribusi Eksponensial Dua Parameter

Berikut akan ditentukan estimator titik Distribusi Eksponensial dua parameter dengan Metode Momen dan Metode Maksimum *Likelihood* yang dapat dilihat pada teorema-teorema berikut

Teorema 3.2.1 :

Jika $X \sim Exp(\theta, \eta)$ *maka estimator titik dengan menggunakan metode momen adalah.* $\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \overline{X}^2}$ dan $\overline{X} - \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \overline{X}^2}$

Bukti :

Menurut definisi momen :

$$m_1' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^1 \quad \text{dan} \quad m_2' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

$$E(x^2) = Var(x) + [E(x)]^2$$
$$= \theta^2 + (\theta + \eta)^2$$

Maka dengan menggunakan metode momen diperoleh :

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^1}{n} = \hat{\theta} + \hat{\eta}$$

$$\overline{X} = \hat{\theta} + \hat{\eta}$$

sehingga

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} = \hat{\theta}^2 + (\hat{\theta} + \hat{\eta})^2$$

$$\hat{\theta} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \overline{X}^2} \tag{18}$$

dan

$$\hat{\eta} = \overline{X} - \hat{\theta}$$

$$= \overline{X} - \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \overline{X}^2} \tag{19}$$

Jadi estimator titik untuk θ dan η adalah:

$$\hat{\theta} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}{n} - \overline{X}^{\,2}} \quad \text{dan} \quad \hat{\eta} = \overline{X} - \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}{n} - \overline{X}^{\,2}} \quad \blacksquare$$

Teorema 4.2.2 :
Jika $X \sim Exp(\theta, \eta)$ *maka estimator titik dengan menggunakan metode maksimum likelihood* $\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{1:n})}{n}$ dan $\hat{\eta} = x_{1:n}$.

Bukti :
Fungsi maksimum *likelihood* dari $X_1, X_2, \ldots, X_n$ adalah :

$$L(\theta,\eta) = f(x_1;\theta,\eta) \cdot f(x_2;\theta,\eta) \cdot \cdots \cdot f(x_n;\theta,\eta)$$

$$= \frac{1}{\theta} e^{\frac{-(x_1-\eta)}{\theta}} \cdot \frac{1}{\theta} e^{\frac{-(x_2-\eta)}{\theta}} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{\theta} e^{\frac{-(x_n-\eta)}{\theta}}$$

$$= \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\eta)}{\theta}}$$

$$L(\theta,\eta) = \theta^{-n} \exp\left[-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\eta)}{\theta}\right] \tag{20}$$

Kemudian untuk mempermudah perhitungan maka ditarik logaritma natural untuk kedua ruas menjadi :

$$\ln L(\theta,\eta) = -n \ln\theta - \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\eta)}{\theta} \tag{21}$$

Syarat fungsi maksimum *L(θ likelihood)* adalah :

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\ln L(\theta,\eta)\right] = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{\partial^2}{\partial^2\theta}\left[\ln L(\theta,\eta)\right] < 0$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\ln L(\theta,\eta)\right] = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{\partial^2}{\partial^2\eta}\left[\ln L(\theta,\eta)\right] < 0$$

Selanjutnya *ln L(θ,η)* diturunkan terhadap *θ* dan *η* untuk mencari titik kritis, sehingga :

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\ln L(\theta,\eta)\right] = -\frac{n}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\eta)}{\theta^2} \tag{22}$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\ln L(\theta,\eta)\right] = \frac{\eta}{\theta} \tag{23}$$

kemudian dicari turunan keduanya:

$$\frac{\partial^2}{\partial^2\theta}\left[\ln\ L(\theta,\eta)\right] = = \frac{n}{\theta^2} - \frac{2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\eta)}{\theta^3} \tag{24}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial^2\eta}\left[\ln\ L(\theta,\eta)\right] = \frac{1}{\theta} \tag{25}$$

dari syarat fungsi maksimum *likelihood* dan persamaan (22), maka :

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\ln\ L(\theta,\eta)\right] = 0$$

$$-\frac{n}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\eta)}{\theta^2} = 0 \tag{26}$$

$$\theta = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\eta)}{n}$$

dari syarat fungsi maksimum *likelihood* dan persamaan (24), maka untuk mengestimasi θ yang diperoleh dengan memaksimumkan fungsi maksimum *likelihood* :

$$\frac{\partial^2}{\partial^2\theta}\left[\ln\ L(\theta,\eta)\right] < 0$$

$$-\frac{n^3}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\eta)^2} < 0 \tag{27}$$

diperoleh $\hat{\theta} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{\eta})}{n}$

dari syarat fungsi maksimum *likelihood* dan persamaan(23) diturunkan terhadap η:

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\ln\ L(\theta,\eta)\right] = 0$$

$$\frac{\eta}{\theta} = 0$$

Metode maksimum *likelihood* tidak menghasilkan estimator titik untuk η.
Jika dilihat dari fungsi maksimum *likelihood*

$$L(\theta,\eta) = \theta^{-n}\exp\left[-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\eta)}{\theta}\right]$$, di mana $\eta = x_{1:n}, x_{2:n}, \ldots, x_{n:n}$

maka $L(\theta,\eta)$ akan maksimum jika η minimum.
Nilai η minimum dicapai pada saat $x_{1:n}$

Jadi, $\hat{\eta} = x_{1:n}$

Sehingga

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{\eta})}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{1:n})}{n}$$

Jadi, estimator titik untuk θ dan η adalah

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{1:n})}{n} \quad \text{dan} \quad \hat{\eta} = x_{1:n} \quad \blacksquare$$

4 KESIMPULAN

Kesimpulan yang dapat diambil dari hasil penelitian yang telah dilakukan antara lain :

1. Estimator titik pada distribusi Eksponensial untuk satu parameter dengan menggunakan :
   i. Metode Momen di peroleh $\hat{\theta} = \overline{X}$.
   ii. Metode Maksimum *Likelihood* di peroleh $\hat{\theta} = \overline{X}$.
   iii. Estimator Bayes dengan distribusi prior sekawan, yaitu distribusi Gamma di peroleh $\hat{\theta} = \frac{\Gamma(n+p+1)}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + \beta\right)\Gamma(n+p)}$ dan estimator Bayes dengan distribusi prior sekawan dengan distribusi Chi-Kuadrat di peroleh $\hat{\theta} = \frac{\Gamma\left(n+\frac{k}{2}+1\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{k}{2}\right)}$
2. Estimator titik pada distribusi Eksponensial untuk dua parameter dengan menggunakan :
   a. Metode Momen di peroleh $\hat{\theta} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \overline{X}^2}$ dan $\hat{\eta} = \overline{X} - \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \overline{X}^2}$.
   b. Metode Maksimum *Likelihood* di peroleh $\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{1:n})}{n}$ dan $\hat{\eta} = x_{1:n}$.

5 Daftar Pustaka

Agustina, S.K. 2007. *Estimasi parameter dengan Metode Bayes. Skripsi Fakultas Matematika dan llmu Pengetahuan Alam*. Universitas Lambung Mangkurat. Banjarbaru.

Bain, L. J. 1991. *Introduction To Probability and Mathematical Statistic*. University of Missouri-Rolla. California.

Dudewicz, dkk. 1995. *Statistika Matematika Modern*. ITB, Bandung.

Harvill, dkk. *Matematika Terapan Untuk Para Insinyur dan fisikawan.* Universitas Gajahmada Press. Yogyakarta.

Herrhyanto, N. 2003. *Statistika Matematis Lanjutan*.Pustaka Setia, Bandung.

Nelder, J.A, & Wedderburn, R. W. M. 1972. *Generalized Linear Models*, J. R. Statist. Soc. Assoc. 135, 370-84.

Noegroho, S. 2007. Teori Estimator Titik. *Statistika Matematika*. 09 : 90-123

Pasaribu, A. 1983. *Pengantar Statistik*. Ghalia Indonesia. Jakarta.

Sudjana. 2005. *Metode Statistika*. Tarsito. Bandung.

Supranto, J. M. A. 1998. *Statistik Teori dan Aplikasi (Edisi kelima) Jilid 2*. Erlangga. Jakarta.

Walpole. 1995. *Pengantar Statistika. Edisi ke-3*. Gramedia, Jakarta.

Walpole, dkk. 2005. *Ilmu Peluang dan Statistika Untuk Insinyur dan Ilmuwan. Edisi keempat*. ITB, Bandung.

Wibisono, Y. 2005. M*etode Statistik*. Gadjah Mada University Press. Yogyakarta.